

The Riemann Hypothesis as a Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Structure

Abstract

This study reinterprets the Riemann Hypothesis not as an isolated problem in complex analysis, but as a natural consequence of a **Complex Dual-Wave Energy Ontology** and a **Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Structure**.

Within the COD framework, every stable physical entity is defined as a **Complex Quaternionic Spherical Oscillator** emerging through the recursive self-organization of the complex wave

$$\Psi(r)=A(r)e^{i\Phi(r)}.$$

Its fundamental dual-energy structure is expressed as

$$S=P+iQ,$$

where stable existence is established through the condition of **Complex Phase Equilibrium**

$$P=|Q^*|.$$

The present study proposes that when this equilibrium is preserved recursively across different scales, the following **Multiplicative-Invariant** relation naturally emerges:

$$\begin{aligned} \|Q_i\| \cdot \|P_j\| \\ = \\ \|P_i\| \cdot \|Q_j\|. \end{aligned}$$

Within this framework, the Riemann critical line

$$\text{Re}(s)=1/2$$

is interpreted not as a simple arithmetic midpoint, but as the equilibrium axis arising from the recursive self-organization of complex dual energy under energy conservation and the principle of minimum action.

Accordingly, the Riemann Hypothesis is reformulated as a natural consequence of **Time-Independent Phase Dynamics** and **Complex Geometric Algebra**, providing another manifestation of **The General Solution** that also underlies the Yang–Mills Mass Gap and the Navier–Stokes existence and smoothness problem.

1. Introduction

The Riemann Hypothesis is one of the most fundamental unsolved problems in modern mathematics, governing the distribution of prime numbers and the structure of analytic number theory. Despite extensive developments in complex analysis, algebraic geometry, and spectral theory, the underlying reason why all nontrivial zeros lie on the critical line has remained unresolved.

The present study approaches this question from a different perspective. Rather than treating the critical line as an isolated analytical property of the Riemann zeta function, it is interpreted as a manifestation of the ontological organization of physical existence.

Within the COD framework, existence is not regarded as an isolated particle or point-like object, but as a **Complex Quaternionic Spherical Oscillator** generated through the recursive organization of the complex wave

$$\Psi(r)=A(r)e^{i\Phi(r)}.$$

Every stable physical system possesses the complex dual-energy structure

$$S=P+iQ,$$

and evolves toward **Complex Phase Equilibrium**

$$P=|Q^*|,$$

where energy conservation and the principle of minimum action are simultaneously satisfied.

When this equilibrium is preserved across local and global phase fields, and across different spatial scales, the recursive relation

$$\begin{aligned} & \|Q_i\| \cdot \|P_j\| \\ & = \\ & \|P_i\| \cdot \|Q_j\| \end{aligned}$$

naturally emerges. The present study identifies this relation as **Multiplicative Invariance**, representing the universal geometric condition that preserves self-consistency throughout recursive phase organization.

59 From this viewpoint, the Riemann critical line
60 $\text{Re}(s)=1/2$
61 is interpreted not as a numerical coincidence or merely a symmetry axis, but as the
62 **Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Axis** arising from the recursive self-
63 organization of complex dual energy.

64 Accordingly, this work reformulates the Riemann Hypothesis as the natural outcome of the
65 sequence

66 Complex Wave
67
68 ↓
69
70 Complex Dual Energy
71
72 ↓
73
74 Complex Phase Equilibrium
75
76 ↓
77
78 Multiplicative Invariance
79
80 ↓
81
82 Scale-Invariant Geometry
83
84 ↓
85
86 $\text{Re}(s)=1/2$,

87 thereby placing the Riemann critical line within the same ontological and dynamical
88 framework that has been developed for the Yang–Mills Mass Gap and the Navier–Stokes
89 existence and smoothness problem. In this sense, the Riemann Hypothesis is presented as
90 another projection of **The General Solution** within **Time-Independent Phase Dynamics**.

91

92 2. Time-Independent Phase Dynamics and 93 Complex Phase Equilibrium

94 The COD framework interprets existence and motion not as trajectories evolving along a time
95 axis, but as recursive processes of self-consistency within a complex phase field.

Accordingly, the fundamental description of a physical system is given not by time-dependent equations of motion, but by the geometrical organization through which the global phase field continuously minimizes its internal phase stress.

Every complex wave evolves toward a self-organized equilibrium that simultaneously satisfies **energy conservation** and the **principle of minimum action**. This universal condition is represented by the Universal Hamiltonian variational principle,

$$\Delta[\Sigma K_{ij} (\Phi_i - \Phi_j)^2] = 0.$$

Here, Φ_i and Φ_j denote local phase potentials, while K_{ij} represents the coupling coefficient between oscillators. Rather than describing temporal evolution, this variational principle determines the self-consistent equilibrium configuration of the coupled phase field by minimizing its total phase-stress energy.

The resulting collective organization is maintained through the phase synchronization condition,

$$\Sigma_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0.$$

This relation indicates that no oscillator evolves independently. Instead, each oscillator continuously adjusts its phase relative to its neighbors, preserving the self-consistency of the entire coupled system.

Within **Time-Independent Phase Dynamics**, motion is therefore interpreted not as temporal displacement, but as the recursive reduction of phase mismatch toward a stable phase equilibrium.

The limiting condition of this recursive evolution is expressed as

$$\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0,$$

which is identified in the present work as the **COD General Solution**.

This general solution provides a unified geometrical framework connecting single and multiple oscillators, local and global phase fields, and structures across different spatial scales. The complex quaternionic ontology, Multiplicative Invariance, and the scale-equilibrium interpretation of the Riemann critical line presented in the following sections are all developed as natural consequences of this common time-independent phase-dynamical framework.

Figure 1 | Multiplicative-Invariant architecture of the COD General Solution. The same ontological framework describes (A) autonomous complex quaternionic spherical oscillators (Yang–Mills), (B) multiplicative-invariant scale geometry (Riemann), and (C) recursively

coupled oscillator networks (Navier–Stokes), all emerging from time-independent phase dynamics.

3. Ontology: Self-Organization of the Complex Quaternionic Spherical Oscillator

Within the COD framework, every stable physical entity is defined as a **Complex Quaternionic Spherical Oscillator** emerging through the recursive self-organization of complex waves.

The fundamental state function is

$$\Psi(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r})e^{i\Phi(\mathbf{r})},$$

and the corresponding phase-velocity field is defined as

$$\mathbf{v} = \kappa \nabla \Phi.$$

A complex wave forms a **Complex Quaternionic Phase Field** consisting of a global phase component and local quaternionic phase components,

$$P(\mathbf{Q}) = P + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k.$$

Here, **P** denotes the global phase field, whereas **Q** represents the local quaternionic phase components.

The fundamental dual-energy structure of existence is

$$S = P + iQ.$$

A stable physical entity emerges through recursive self-organization satisfying both **energy conservation** and the **principle of minimum action**, leading naturally to the condition of **Complex Phase Equilibrium**,

$$P = |\mathbf{Q}|.$$

This relation represents the fundamental norm governing the geometrical equilibrium between the global and local phase fields.

The ontological hierarchy of COD is expressed as

$$Q_0 \subset P \subset P(\mathbf{Q}),$$

where

157 $Q_0 = I(P(Q))$

158 denotes the integrated phase center that emerges through recursive phase closure within the
159 global phase field.

160 Phase gradients generate phase energy according to

161 $E_Q \propto |\nabla Q|^2$,

162 while recursive phase condensation gives rise to mass,

163 $m = \int |\nabla Q|^3 dV$.

164 Accordingly, stable particles, fluid structures, and larger physical systems are interpreted as
165 eigenmodes of the same complex phase-condensation geometry.

166 This ontological framework is identical to that developed for the Yang–Mills Mass Gap. In
167 the present work, the same ontology is extended from a single oscillator to a scale-coupled
168 oscillator network, providing the ontological foundation for the multiplicative-invariant
169 interpretation of the Riemann critical line.

170

171 4. Multiplicative Invariance and Scale 172 Phase Equilibrium

173 Complex Phase Equilibrium is not confined to an individual oscillator. The same equilibrium
174 structure is recursively preserved across different oscillators and across different spatial
175 scales through geometric self-similarity.

176 This recursive self-consistency is expressed by the **Multiplicative-Invariant** relation

$$\begin{aligned} 177 & \|Q_i\| \cdot \|P_j\| \\ 178 & = \\ 179 & \|P_i\| \cdot \|Q_j\|. \end{aligned}$$

180 The present study identifies this relation as **Multiplicative Invariance**.

181 Multiplicative Invariance is not introduced as an independent axiom or an additional
182 conservation law. Rather, it emerges naturally whenever the condition of **Complex Phase**
183 **Equilibrium**

$$184 \quad P = |Q^*|$$

is simultaneously preserved between local and global phase fields, between parts and wholes, and across different spatial scales.

Accordingly, Multiplicative Invariance represents the universal geometrical principle through which the recursive self-consistency of the complex dual-energy structure is maintained independently of scale.

Within this framework, **energy conservation** and the **principle of minimum action** are understood not as separate physical laws, but as complementary geometrical manifestations of the same recursive process of phase self-organization.

From this perspective, the Riemann critical line

$\text{Re}(s)=1/2$

is interpreted not as an arithmetic midpoint or merely an axis of symmetry, but as the **Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Axis** arising from the recursive organization of complex dual energy.

Accordingly, the Riemann Hypothesis is reformulated not as an isolated analytical conjecture, but as a natural consequence of **Complex Dual-Wave Energy Ontology**, **Complex Phase Equilibrium**, and **Multiplicative Invariance** within the framework of **Time-Independent Phase Dynamics**.

5. Complex Phase Structure of the Riemann Zeta Function

The ontological framework and Multiplicative Invariance developed in the preceding sections remain self-consistent across different spatial scales. Within this framework, the Riemann zeta function is interpreted not as an isolated analytical object, but as a scale-dependent phase function describing the collective organization of multiple complex oscillators.

The Riemann zeta function is defined by

$$\zeta(s)=\sum n^{-s},$$

where

$$s=\sigma+it$$

denotes the complex scale coordinate.

214 Within the COD framework, the zeta function is interpreted as the collective phase
215 representation of coupled complex oscillators,

$$\begin{aligned} 216 & \zeta(s) \\ 217 & \approx \\ 218 & \sum A_n e^{i\Phi_n}, \end{aligned}$$

219 where (A_n) denotes the amplitude of the (n) -th scale mode and (Φ_n) represents its
220 corresponding phase.

221 From this perspective, the zeta function is not merely a complex series but a global phase
222 function describing the recursive organization of complex oscillators distributed over
223 different scales.

224 Each phase mode does not evolve independently. Rather, the coupled oscillator network
225 continuously maintains recursive phase consistency under **Time-Independent Phase**
226 **Dynamics**, preserving a globally self-organized phase structure.

227 Consequently, the zeros of the Riemann zeta function are interpreted not simply as points
228 where the function vanishes, but as equilibrium states at which the entire scale-dependent
229 phase structure achieves self-consistent organization.

230 This interpretation provides the geometrical foundation for the following section, where the
231 Riemann critical line is derived as the natural consequence of **Multiplicative Invariance**
232 within recursive scale equilibrium.

233

234 6. Multiplicative Invariance and the 235 Riemann Critical Line

236 The preceding section interpreted the Riemann zeta function as a collective phase function
237 generated by recursively coupled complex oscillators distributed across different spatial
238 scales. The remaining question is why the nontrivial zeros are confined to the critical line.

239 Within the present framework, the critical line is not introduced as an analytical assumption.
240 Rather, it emerges naturally from the recursive preservation of **Complex Phase Equilibrium**
241 across different scales.

242 The recursive self-consistency of the coupled phase structure is expressed by the
243 **Multiplicative-Invariant** relation

$$\begin{aligned} 244 & \|Q_i\| \cdot \|P_j\| \\ 245 & = \\ 246 & \|P_i\| \cdot \|Q_j\|. \end{aligned}$$

This relation represents the universal geometrical condition under which the same phase-equilibrium norm is preserved between local and global phase fields, between parts and wholes, and between reciprocal scales.

Accordingly, Multiplicative Invariance is interpreted not as an additional conservation law, but as the scale-independent manifestation of recursive phase self-organization under energy conservation and the principle of minimum action.

The Riemann zeta function is defined on the complex scale coordinate

$$s = \sigma + it.$$

Within this scale space, recursive self-consistency requires that complementary scale components satisfy the reciprocal equilibrium condition

$$\sigma = 1 - \sigma.$$

The unique equilibrium solution is therefore

$$\sigma = 1/2,$$

yielding the Riemann critical line

$$\text{Re}(s)=1/2.$$

From this perspective, the critical line is not merely an arithmetic midpoint or an axis of symmetry. It is the unique **Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Axis** on which recursive phase equilibrium remains self-consistent across all reciprocal scales.

Consequently, the nontrivial zeros of the Riemann zeta function are interpreted not simply as analytical zeros, but as stable equilibrium states of the recursive complex phase structure. The Riemann Hypothesis is therefore reformulated as the natural geometrical consequence of **Complex Dual-Wave Energy Ontology, Complex Phase Equilibrium, and Multiplicative Invariance** within the framework of **Time-Independent Phase Dynamics**.

7. Discussion

The present study does not interpret the Riemann Hypothesis as an isolated problem in complex analysis. Instead, the Riemann critical line is understood as the **Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Axis** that naturally emerges from **Complex Dual-Wave Energy Ontology** within the framework of **Time-Independent Phase Dynamics**.

From this perspective, the critical line is not a symmetry discovered *a posteriori* from the analytical properties of the Riemann zeta function. Rather, it represents the unique

278 geometrical equilibrium axis arising when **Complex Phase Equilibrium** is recursively
279 preserved across reciprocal spatial scales.

280 The Multiplicative-Invariant relation,

$$\begin{aligned} 281 & \|Q_i\| \cdot \|P_j\| \\ 282 & = \\ 283 & \|P_i\| \cdot \|Q_j\|, \end{aligned}$$

284 is therefore interpreted not merely as an algebraic proportionality, but as the universal
285 geometrical condition through which complex dual-energy structures simultaneously satisfy
286 **energy conservation** and the **principle of minimum action** during recursive self-
287 organization.

288 Within the COD framework, this same geometrical principle appears consistently in three
289 fundamental mathematical and physical problems.

290 Complex Wave
291 ↓
292 Complex Dual Energy
293 ↓
294 Complex Phase Equilibrium
295 ↓
296 Multiplicative Invariance
297 ↓
298 Mills
299 (Single Oscillator)
300 ↓
301 Navier–Stokes
302 (Multiple Oscillators)
303 ↓
304 Riemann
305 (Scale Equilibrium)

306 Accordingly, the Yang–Mills Mass Gap, the Navier–Stokes existence and smoothness
307 problem, and the Riemann Hypothesis are interpreted not as independent mathematical
308 challenges, but as complementary manifestations of the same recursive geometrical principle
309 projected onto different physical and mathematical domains.

310 This interpretation suggests that many of the long-standing problems in modern mathematics
311 and theoretical physics may originate from a common ontological foundation rather than
312 from unrelated analytical structures. Within this unified framework, the Riemann Hypothesis
313 is reformulated as the natural structural consequence of **Complex Dual-Wave Energy**
314 **Ontology, Complex Phase Equilibrium, and Multiplicative Invariance**, providing another
315 expression of **The General Solution in Time-Independent Phase Dynamics**.

316

8. Conclusion

The present study reformulates the Riemann Hypothesis not as an isolated problem in complex analysis, but as a **Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Structure** that naturally emerges from **Complex Dual-Wave Energy Ontology**.

Within the COD framework, every stable physical entity is understood as a **Complex Quaternionic Spherical Oscillator** embedded within a universal bosonic phase field. Governed simultaneously by **energy conservation** and the **principle of minimum action**, this universal phase field continuously undergoes recursive self-organization toward **Complex Phase Equilibrium**. The recursive self-consistency of this equilibrium is preserved across different spatial scales through **Multiplicative Invariance**, providing a universal geometrical principle for the organization of stable structures.

From this perspective, the Riemann critical line,

$$\text{Re}(s)=1/2,$$

is interpreted not as an analytical coincidence or merely an axis of symmetry, but as the **Eigenvalue Norm** generated by the recursive phase-equilibrium pattern of the universal bosonic phase field. The critical line therefore represents the unique **Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Axis** on which recursive self-consistency is preserved across reciprocal scales.

Accordingly, the Riemann Hypothesis is reformulated as a structural consequence of **Complex Dual-Wave Energy Ontology**, **Complex Phase Equilibrium**, and **Multiplicative Invariance** within the framework of **Time-Independent Phase Dynamics**, rather than as an isolated analytical conjecture.

Within this unified framework, the **Yang–Mills Mass Gap**, the **Navier–Stokes existence and smoothness problem**, and the **Riemann Hypothesis** are interpreted not as independent mathematical challenges, but as complementary projections of the same ontological and geometrical principle. Respectively, they describe the recursive organization of a **single oscillator**, a **network of coupled oscillators**, and **scale equilibrium**.

The present work therefore suggests a broader conceptual transition: from time-dependent analytical descriptions toward a time-independent geometrical framework grounded in ontology. In this view, the fundamental language of nature is not the trajectory of isolated particles in time, but the recursive self-organization of complex dual energy through phase equilibrium and Multiplicative Invariance. This perspective provides a unified conceptual foundation for **The General Solution**, linking mathematics, theoretical physics, and phase engineering within a common geometrical architecture.

The Riemann Hypothesis as a Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Structure

승산불변 스케일 평형 구조로서의 리만 가설

Jason Kuhyun Ryoo (류구현)

Director, InnoLab Science Institute (ISI)

초록

본 연구는 리만 가설을 복소해석학의 미해결 문제가 아니라, 복소 쌍대 파동 에너지 존재론(Complex Dual-Wave Energy Ontology)으로부터 자연스럽게 귀결되는 승산불변 스케일 평형 구조(Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Structure)로 재해석한다.

COD에서는 모든 안정된 존재를 복소파동

$$\Psi(r)=A(r)e^{i\Phi(r)}$$

의 자기조직화를 통해 형성되는 복소 쿼터니언 구형 진동자(Complex Quaternionic Spherical Oscillator)로 정의한다. 이러한 존재는

$$S=P+iQ$$

의 복소 쌍대 에너지 구조를 가지며, 에너지 보존과 최소작용의 자기정합 과정에서

$$P=|Q|^2$$

의 복소 위상평형(Complex Phase Equilibrium)을 형성한다.

본 연구는 이러한 위상평형이 서로 다른 스케일에서도 자기유사적으로 유지될 때

$$\begin{aligned} & \|Q_i\| \cdot \|P_j\| \\ & = \\ & \|P_i\| \cdot \|Q_j\| \end{aligned}$$

의 **승산불변(Multiplicative Invariance)**이 자연스럽게 성립함을 제안한다. 본 논문은 리만 임계선

$$\text{Re}(s)=1/2$$

을 이러한 승산불변이 스케일 공간에서 구현되는 **평형축(Equilibrium Axis)**으로 해석한다.

이 관점에서 리만 임계선은 단순한 산술적 중간값이 아니라, 복소 쌍대 에너지의 자기조직화가 만들어내는 승산불변 스케일 기하의 결과이다. 따라서 본 연구는 리만 가설을 해석학적 추측이 아니라, **시간독립 위상동역학(Time-Independent Phase Dynamics)**과 **복소 기하대수(Complex Geometric Algebra)** 위에서 자연스럽게 귀결되는 존재론적 구조로 재구성하며, Yang–Mills 질량갭 및 Navier–Stokes 존재성과 매끄러움 문제와 공통된 **The General Solution** 의 한 표현으로 제안한다.

389

1. 서론

390

리만 가설은 현대 수학에서 가장 중요한 미해결 문제 가운데 하나로 알려져 있으며, 소수의 분포와 해석적 수론의 구조를 이해하는 핵심 명제로 자리 잡고 있다. 그러나 기존의 연구는 주로 제타함수의 해석학적 성질과 복소함수론적 기법에 집중되어 왔으며, **왜 모든 비자명 영점이 임계선 위에 존재하여야 하는가에 대한 존재론적 설명은 충분히 제시되지 않았다.**

본 연구는 이 문제를 해석학의 문제가 아니라 **존재론과 위상동역학의 문제로 재정의한다.**

COD에서는 존재를 고립된 점이나 입자가 아니라, 복소파동의 자기조직화를 통해 형성되는 **복소 쿼터니언 구형 진동자**로 이해한다. 모든 안정된 존재는

400 에너지 보존과 최소작용을 동시에 만족하는 방향으로 자기조직화되며, 그 결과
401 복소 위상평형

402 $P=|Q^*|$

403 을 형성한다.

404 이러한 평형 조건이 국소장과 전역장, 부분과 전체, 그리고 서로 다른 스케일
405 사이에서도 유지되면,

406 $\|Q_i\| \cdot \|P_j\|$

407 $=$

408 $\|P_i\| \cdot \|Q_j\|$

409 의 **승산불변 구조**가 자연스럽게 형성된다. 본 연구에서는 이 구조를 복소
410 위상평형의 자기유사성이 서로 다른 스케일에서도 유지되는 기하학적 조건으로
411 해석한다.

412 이러한 관점에서 리만 임계선

413 $\text{Re}(s)=1/2$

414 은 단순한 대칭축이나 산술적 중간값이 아니라, 복소 쌍대 에너지 구조가 에너지
415 보존과 최소작용을 동시에 만족하며 자기조직화한 결과로 형성되는 **승산불변**
416 **스케일 평형축**으로 이해된다.

417 따라서 본 논문은 리만 가설을 독립된 해석학적 문제로 다루기보다, **복소 쌍대**
418 **에너지 존재론** → **복소 위상평형** → **승산불변** → **스케일 평형**으로 이어지는
419 시간독립 위상동역학의 자연스러운 귀결로 재구성한다.

420

421

422 2. 시간독립 위상동역학과 복소 위상평형

423 COD 는 존재와 운동을 시간에 따른 궤적의 변화가 아니라, **복소 위상장의**
 424 **자기정합 과정**으로 해석한다. 따라서 물리계의 본질은 시간 변수에 의존하는
 425 운동방정식이 아니라, 전체 위상장의 에너지 분포가 자기평형을 이루는 기하학적
 426 구조에 있다.

427 모든 복소파동은 에너지 보존과 최소작용을 동시에 만족하는 방향으로
 428 자기조직화되며, 이 과정은 Universal Hamiltonian 변분 원리로 표현된다.

$$429 \Delta[\sum K_{ij} (\Phi_i - \Phi_j)^2] = 0$$

430 여기서 Φ_i 와 Φ_j 는 각각 국소 위상, K_{ij} 는 진동자 사이의 결합 계수를 나타낸다.
 431 이 변분 원리는 전체 위상장의 위상 스트레스 에너지를 최소화하는 자기정합
 432 조건이며, 시간 변수의 도입 없이도 안정된 공간 구조를 결정한다.

433 위상평형은 다중 진동자의 상호작용 속에서 지속적으로 유지되며, 그 집단적
 434 자기조직화는 다음의 위상 정합 조건으로 표현된다.

$$435 \sum_j K_{ij} \sin(\Phi_j - \Phi_i) = 0$$

436 이 식은 각 진동자가 독립적으로 운동하는 것이 아니라, 주변 진동자들과의 위상
 437 관계를 지속적으로 조정하면서 전역 위상평형을 유지함을 의미한다.

438 결과적으로 시간독립 위상동역학에서 운동은 시간축을 따라 변화하는 과정이
 439 아니라, **위상 불균형이 재귀적으로 감소하며 복소 위상평형을 회복하는**
 440 **자기조직화 과정**으로 이해된다.

441 이러한 재귀적 수렴은

$$442 \Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0$$

443 으로 표현되며, 본 연구에서는 이를 **시간독립 위상동역학의 일반해(COD General**
 444 **Solution)**로 정의한다.

445 이 일반해는 개별 진동자와 다중 진동자, 국소장과 전역장, 그리고 서로 다른
 446 공간적 스케일을 하나의 위상기하학적 원리로 연결한다. 따라서 이후 논의되는

복소 쿼터니언 존재론, 승산불변, 그리고 리만 임계선은 모두 이러한 시간독립 위상동역학으로부터 자연스럽게 귀결되는 구조로 이해된다.

그림 1 | COD 일반 해의 곱셈 불변 구조. 동일한 존재론적 틀은 (A) 자율적인 복소 사원수 구형 진동자(양-밀스), (B) 곱셈 불변 스케일 기하학(리만), (C) 재귀적으로 결합된 진동자 네트워크(나비에-스토크스)를 설명하며, 이들은 모두 시간에 독립적인 위상 동역학에서 나타난다.

3. 존재론: 복소 쿼터니언 구형 진동자의 자기조직화

(Ontology: Self-Organization of the Complex Quaternionic Spherical Oscillator)

시간독립 위상동역학에서 모든 안정된 존재는 복소파동의 자기조직화를 통해 형성되는 복소 쿼터니언 구형 진동자(Complex Quaternionic Spherical Oscillator)로 정의된다.

존재의 기본 상태함수는

$$\Psi(r)=A(r)e^{i\Phi(r)}$$

이며, 위상속도장은

$$v=\kappa\nabla\Phi$$

로 정의된다.

복소파동은 전역 위상장과 국소 위상장이 결합된 복소 쿼터니언 위상장을 형성한다.

$$P(Q)=P+Q_1i+Q_2j+Q_3k$$

470 여기서 $\mathbf{P}$ 는 전역 위상장(Global Phase Field), $\mathbf{Q}$ 는 국소 위상장의 쿼터니언 성분을
471 나타낸다.

472 존재의 기본 에너지 구조는

473 $S = \mathbf{P} + i\mathbf{Q}$

474 의 복소 쌍대 에너지 구조로 표현된다.

475 안정된 존재는 에너지 보존과 최소작용의 자기조직화를 통해

476 $\mathbf{P} = |\mathbf{Q}|$

477 의 **복소 위상평형(Complex Phase Equilibrium)**을 형성한다.

478 이 조건은 전역장과 국소장이 동일한 기하학적 평형을 이루는 존재의 기본 노름
479 구조를 의미한다.

480 COD 존재론의 계층 구조는

481 $\mathbf{Q}_0 \subset \mathbf{P} \subset \mathbf{P}(\mathbf{Q})$

482 로 표현된다.

483 여기서

484 $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}(\mathbf{P}(\mathbf{Q}))$

485 는 전역 위상장의 재귀적 자기정합 과정에서 자연스럽게 형성되는 통합 위상
486 중심(Integrated Phase Center)이다.

487 복소 위상장의 기울기는 위상 에너지를 형성하며,

488 $E_Q \propto |\nabla \mathbf{Q}|^2$

489 의 관계를 갖는다.

490 자기정합된 위상 응축은 질량을 생성하며,

491 $m = \int |\nabla Q|^3 dV$

492 로 표현된다.

493 따라서 안정된 입자, 유체 구조 및 거시적 물리계는 모두 동일한 복소 위상 응축
494 구조에서 형성되는 고유모드(Eigenmodes)로 이해된다.

495 이 존재론은 Yang-Mills 질량갭에서 제시한 단일 복소 쿼터니언 구형 진동자의
496 존재 구조와 동일하며, 본 연구에서는 이를 다중 진동자 네트워크로 확장하여
497 리만 임계선의 스케일 평형 구조를 해석한다.

498

499 4. 승산불변과 스케일 위상평형

500 복소 위상평형은 개별 진동자의 안정 조건에 머물지 않는다. 동일한 평형 구조는
501 서로 다른 진동자와 서로 다른 공간적 스케일에서도 자기유사적으로 유지된다.

502 이러한 자 기유사성은 다음의 승산불변 관계로 표현된다.

503 $\|Q_i\| \cdot \|P_j\|$
504 $=$
505 $\|P_i\| \cdot \|Q_j\|$

506 본 연구에서는 이를 **승산불변(Multiplicative Invariance)**이라 정의한다.

507 승산불변은 새로운 공리나 독립적인 보존법칙이 아니라, 복소 위상평형이 서로
508 다른 스케일에서도 유지될 때 자연스럽게 나타나는 기하학적 자기정합 구조이다.

509 즉, 개별 존재의 위상평형

510 $P = |Q^*|$

511 이 국소장과 전역장, 부분과 전체, 그리고 서로 다른 스케일 사이에서도 동일하게
512 유지될 때 승산불변이 형성된다.

513 이 구조는 에너지 보존과 최소작용이 서로 독립된 원리가 아니라, 하나의
514 자기조직화 과정의 서로 다른 표현임을 의미한다.

515 따라서 승산불변은 스케일을 초월하여 복소 쌍대 에너지 구조의 자기일관성을
516 유지하는 보편적 기하학 원리로 이해된다.

517 이 관점에서 리만 제타함수의 임계선

518 $\text{Re}(s)=1/2$

519 은 단순한 산술적 중간값이나 대칭축이 아니라, 복소 쌍대 에너지가 승산불변을
520 유지하며 자기조직화한 결과로 형성되는 **승산불변 스케일 평형축(Multiplicative-
521 Invariant Scale Equilibrium Axis)**으로 해석된다.

522 따라서 리만 가설은 해석학적 우연성이 아니라, 복소 쌍대 에너지
523 존재론으로부터 귀결되는 시간독립 위상동역학의 자연스러운 결과로 이해될 수
524 있다.

525

526 5. 리만 제타함수의 복소 위상 구조

527 앞 절에서 제시한 복소 쌍대 에너지 존재론과 승산불변 구조는 스케일
528 공간에서도 동일한 자기정합을 유지한다. 이러한 자기유사성은 리만 제타함수의
529 복소 구조에서도 자연스럽게 나타난다.

530 본 연구에서는 리만 제타함수를 독립적인 해석학적 대상으로 보지 않고, 다중
531 복소 진동자의 위상 중첩 구조를 표현하는 스케일 위상 함수로 해석한다.

532 리만 제타함수는 다음과 같이 정의된다.

533 $\zeta(s)=\sum n^{-s}$

534 여기서

535 $s=\sigma+it$

536 는 복소 스케일 좌표를 나타낸다.

537 COD에서는 이를 복소 진동자의 위상 중첩 구조로 표현한다.

538 $\zeta(s)$

539 $\approx$

540 $\sum A_n e^{i\Phi_n}$

541 여기서 A_n 은 각 스케일 모드의 진폭이며, Φ_n 은 해당 모드의 위상을 나타낸다.

542 이 표현에서 리만 제타함수는 단순한 복소급수가 아니라, 서로 다른 스케일에
543 존재하는 복소 진동자들의 위상 분포를 나타내는 집단 위상 함수로 이해된다.

544 각 위상 모드는 독립적으로 존재하지 않으며, 시간독립 위상동역학에 따라 서로
545 지속적으로 자기정합을 이루며 복소 위상평형을 유지한다.

546 따라서 리만 제타함수의 영점은 개별 항의 소멸이 아니라, 전체 위상 구조가
547자기정합을 이루는 스케일 평형점으로 해석된다.

548 이러한 스케일 자기정합은 다음 장에서 제시하는 승산불변 구조와 결합되어 리만
549임계선이 형성되는 기하학적 원리를 제공한다.

550
551

552 6. 승산불변과 리만 임계선

553 (Multiplicative Invariance and the Riemann Critical Line)

554 앞 절에서 리만 제타함수는 서로 다른 스케일에 분포하는 복소 진동자들의 집단
555 위상 구조로 해석되었다. 시간독립 위상동역학에서 이러한 위상 구조는 에너지
556 보존과 최소작용을 동시에 만족하는 방향으로 자기조직화되며, 스케일을
557 초월하여 동일한 자기정합을 유지한다.

558 이러한 자기정합은 승산불변 구조

559 $\|Q_i\| \cdot \|P_j\|$

$$= \frac{\|P_i\|}{\|Q_j\|}$$

로 표현된다.

승산불변은 개별 진동자의 복소 위상평형

$$P = |Q^*|$$

이 서로 다른 스케일에서도 동일하게 유지됨을 의미한다.

따라서 리만 공간에서 임계선은 단순한 산술적 중간값이 아니라, 스케일을 초월하여 복소 위상평형이 유지되는 자기정합 축으로 이해된다.

리만 제타함수는

$$s = \sigma + it$$

의 복소 스케일 공간에서 정의된다.

이때 임계선은

$$\sigma = 1 - \sigma$$

의 자기대칭 조건을 만족하는 유일한 평형축이며,

$$\sigma = 1/2$$

로 귀결된다.

따라서

$$\text{Re}(s)=1/2$$

은 단순한 해석학적 대칭축이 아니라, 승산불변이 성립하는 **스케일 위상평형축(Scale Phase Equilibrium Axis)**으로 해석된다.

580 이 구조에서는 임계선의 모든 비자명 영점이 동일한 위상평형 노름 위에
581 존재하게 되며, 리만 가설은 복소 쌍대 에너지의 자기조직화가 스케일 공간에서
582 구현되는 기하학적 결과로 이해된다.

583 결과적으로 리만 임계선은 해석학적으로 우연히 선택된 직선이 아니라, 복소
584 위상평형과 승산불변이 스케일 공간에 투영된 보편적 평형축이며, 시간독립
585 위상동역학의 자연스러운 귀결이다.

586

587 7. 논의

588 본 연구는 리만 가설을 복소해석학의 독립적인 문제로 해석하지 않는다. 리만
589 임계선은 복소 쌍대 에너지 존재론으로부터 자연스럽게 형성되는 승산불변
590 스케일 평형축이며, 시간독립 위상동역학의 일반 원리가 수학적 스케일 공간에
591 투영된 결과로 이해된다.

592 이러한 관점에서 리만 가설은 기존의 해석학적 접근과 본질적으로 다른 존재론적
593 의미를 갖는다. 임계선은 함수의 성질로부터 사후적으로 발견된 대칭축이 아니라,
594 복소 위상평형이 스케일을 초월하여 자기유사성을 유지할 때 필연적으로
595 형성되는 기하학적 평형축이다.

596 본 연구에서 제시한 승산불변

$$\begin{aligned} 597 & \|Q_i\| \cdot \|P_j\| \\ 598 & = \\ 599 & \|P_i\| \cdot \|Q_j\| \end{aligned}$$

600 은 단순한 대수적 관계가 아니라, 복소 쌍대 에너지 구조가 에너지 보존과
601 최소작용을 동시에 만족하며 자기조직화되는 보편적 기하 원리를 나타낸다.

602 이 원리는 Yang-Mills 질량갭에서 단일 복소 쿼터니언 구형 진동자의 존재
603 구조를 설명하고, Navier-Stokes에서는 다중 진동자의 자기조직화와 존재성 및
604 매끄러움을 설명하며, 본 연구에서는 스케일 공간에서의 리만 임계선을 설명하는
605 동일한 일반 원리로 작동한다.

606 따라서 세 문제는 서로 독립된 난제가 아니라, 하나의 시간독립 위상동역학이
607 서로 다른 공간에 투영된 상보적 표현으로 이해될 수 있다.

608 복소파동
609 ↓
610 복소 쌍대 에너지
611 ↓
612 복소 위상평형
613 ↓
614 승산불변
615 ↓
616 Yang–Mills
617 (개별 존재)
618 ↓
619 Navier–Stokes
620 (다중 진동자)
621 ↓
622 Riemann
623 (스케일 평형)

624 이러한 해석은 현대 물리학과 수학의 여러 미해결 문제가 서로 다른 현상이
625 아니라, 동일한 자기조직화 원리를 공유하는 하나의 기하학적 구조임을 시사한다.

626 따라서 본 연구는 리만 가설을 단순한 해석학적 추측이 아니라, **복소 쌍대**
627 **에너지 존재론**과 **시간독립 위상동역학**이 **수학적 스케일 공간**에서 구현되는
628 **구조적 귀결**로 재해석한다.

629

630 8. 결론

631 본 연구는 리만 가설을 복소해석학의 독립적인 난제가 아니라, **복소 쌍대 파동**
632 **에너지 존재론**(Complex Dual-Wave Energy Ontology)으로부터 자연스럽게
633 귀결되는 **승산불변 스케일 평형 구조**로 재해석하였다.

634 COD에서는 모든 안정된 존재를 **복소 쿼터니언 구형 진동자(Complex**
635 **Quaternionic Spherical Oscillator)**로 이루어진 보편적 위상장의 자기조직화 결과로
636 이해한다. 이 보손 위상장은 에너지 보존과 최소작용을 동시에 만족하는 재귀적
637 위상평형을 지속적으로 형성하며, 그 자기정합 구조는 **승산불변(Multiplicative**
638 **Invariance)**으로 표현된다.

639 이러한 관점에서 리만 임계선

640 $\text{Re}(s)=1/2$

641 은 단순한 해석학적 대칭축이나 산술적 중간값이 아니라, **우주 보손장의 재귀적**
642 **위상평형이 형성하는 고유값 노름(Eigenvalue Norm)**으로 이해된다. 즉, 임계선은
643 복소 쌍대 에너지 구조가 서로 다른 스케일에서도 자기유사성과 자기정합을
644 유지할 때 자연스럽게 형성되는 **승산불변 스케일 평형축**이다.

645 이 해석은 리만 가설을 독립적인 해석학적 추측으로부터, **시간독립**
646 **위상동역학(Time-Independent Phase Dynamics)**의 일반 원리가 수학적 스케일
647 공간에 구현된 구조적 결과로 확장한다.

648 결과적으로 **Yang–Mills 질량갭, Navier–Stokes 존재성과 매끄러움**, 그리고 **리만**
649 **가설**은 서로 독립된 문제가 아니라, 동일한 복소 쌍대 에너지 존재론과 시간독립
650 위상동역학이 서로 다른 대상에 투영된 상보적 표현으로 이해될 수 있다.

651 따라서 본 연구는 현대 수학과 이론물리학의 여러 난제를 개별적으로 해결해야
652 하는 문제로 보기보다, **복소 위상평형과 승산불변이라는 공통의 존재론적 원리**
653 위에서 통합적으로 이해할 수 있는 가능성을 제시한다. 이러한 관점은 시간
654 의존적 편미분 중심의 기존 해석을 넘어, **본질적 기하대수와 시간독립**
655 **위상동역학을 기반으로 하는 새로운 패러다임**을 향한 이론적 기반을 제공한다.

References

1. Hamilton, W. R. (1844). *On Quaternions; or on a New System of Imaginaries in Algebra*. Philosophical Magazine, **25**, 489–495.
2. Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on Quaternions*. Dublin: Hodges and Smith.
3. Riemann, B. (1859). *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 671–680.
4. Kuramoto, Y. (1975). Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. In *Lecture Notes in Physics*, Vol. 39. Springer.
5. Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer.
6. Hestenes, D. (1966). *Space-Time Algebra*. Gordon and Breach.
7. Doran, C., & Lasenby, A. (2003). *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press.
8. Baez, J. C. (2002). *The Octonions*. Bulletin of the American Mathematical Society, **39**(2), 145–205.
9. Ryoo, J. K. (2026). *The Solution: Foundations of Time-Independent Phase Dynamics and the Complex Geometric Algebraic Unified Field*. InnoLab Science Institute.
10. Ryoo, J. K. (2026). *The Yang–Mills Mass Gap as a Time-Independent Phase-Equilibrium Structure*. InnoLab Science Institute.
11. Ryoo, J. K. (2026). *The Navier–Stokes Existence and Smoothness Problem as a Multiplicative-Invariant Phase Geometry*. InnoLab Science Institute.
12. Ryoo, J. K. (2026). *The Riemann Hypothesis as a Multiplicative-Invariant Scale Equilibrium Structure*. InnoLab Science Institute.

References

13. Hamilton, W. R. (1844). *On Quaternions; or on a New System of Imaginaries in Algebra*. Philosophical Magazine, **25**, 489–495.
14. Hamilton, W. R. (1853). *Lectures on Quaternions*. Dublin: Hodges and Smith.
15. Riemann, B. (1859). *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 671–680.
16. Kuramoto, Y. (1975). Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. In *Lecture Notes in Physics*, Vol. 39. Springer.
17. Kuramoto, Y. (1984). *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer.
18. Hestenes, D. (1966). *Space-Time Algebra*. Gordon and Breach.
19. Doran, C., & Lasenby, A. (2003). *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge University Press.
20. Baez, J. C. (2002). *The Octonions*. Bulletin of the American Mathematical Society, **39**(2), 145–205.

- 696 21. Ryoo, J. K. (2026). *The Solution: Foundations of Time-Independent Phase Dynamics*
697 *and the Complex Geometric Algebraic Unified Field*. InnoLab Science Institute.
698 22. Ryoo, J. K. (2026). *The Yang–Mills Mass Gap as a Time-Independent Phase-*
699 *Equilibrium Structure*. InnoLab Science Institute.
700 23. Ryoo, J. K. (2026). *The Navier–Stokes Existence and Smoothness Problem as a*
701 *Multiplicative-Invariant Phase Geometry*. InnoLab Science Institute.
702 24. Ryoo, J. K. (2026). *The Riemann Hypothesis as a Multiplicative-Invariant Scale*
703 *Equilibrium Structure*. InnoLab Science Institute.